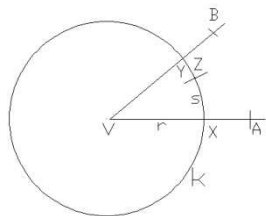


D) Goniometrické funkce a rovnice

§1. Velikost úhlu v obloukové míře

Def.: Nechť AVB je úhel. Pak mu přiřazujeme reálné číslo $\alpha \in \mathbf{R}$, které nazýváme velikostí úhlu AVB takto:



Nechť $k(V, r)$; $X \in k \cap \overrightarrow{VA}$

$Y \in k \cap \overrightarrow{VB}$, označme s velikost oblouku XY

(přesněji $s = |XZY|$, kde $Z \in XY$)

Definujeme pak velikost úhlu $\alpha = \frac{s}{r}$.

Pozn.: Uvedená definice je korektní, neboť pro 2 kružnice k_1, k_2 s poloměry r_1, r_2 a oblouky $s_1 = |X_1Y_1|$ a $s_2 = |X_2Y_2|$ platí $s_1/r_1 = s_2/r_2$. Proto zpravidla při určování velikosti úhlu volíme tzv. jednotkovou kružnici ($r = 1$).

Pozn.: a) Je-li $s = r \Rightarrow$ úhel má velikost 1 radián, značka 1 rad.
 b) Je-li dána velikost úhlu v radiánech (resp. ve stupních), mluvíme o obloukové (resp. stupňové) míře úhlu.
 c) Protože jednotková kružnice má délku 2π radiánů, odpovídá 2π rad (v obloukové míře) úhel o velikosti 360° (ve stupňové míře).
 d) Pro velikost úhlu v obloukové míře se obvykle používá pouze číselná hodnota velikosti úhlu (tedy místo 2π rad se používá 2π).

V.1.1.: Nechť AVB je úhel, α jeho velikost v radiánech, β ve stupních. Pak platí:

$$\alpha = \beta \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \qquad \beta = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

[Dk.: ...]

Pozn.: Převody velikostí některých úhlů v míře obloukové a stupňové:

$\beta [^\circ]$	0	30	45	60	90	180	270	360
$\alpha [\text{rad}]$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

§2. Orientovaný úhel

Def.: Orientovaným úhlem AVB nazýváme úhel s uspořádanou dvojicí polopřímek $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ se společným počátkem V . Polopřímku $\overrightarrow{VA}$, resp. $\overrightarrow{VB}$ nazýváme počátečním, resp. koncovým ramenem orientovaného úhlu AVB , bod V jeho vrchol.

Pozn.: a) Orientovaný úhel AVB může vzniknout otáčením polopřímky $\overrightarrow{VA}$ do polohy polopřímky $\overrightarrow{VB}$ kolem bodu V . Toto otočení lze provést 2 směry.
 Za kladný (resp. záporný) smysl otáčení budeme považovat otáčení proti (resp. po) směru hodinových ručiček.
 b) Základní velikostí α orientovaného úhlu AVB budeme rozumět velikost takového úhlu, který vznikne otočením $\overrightarrow{VA}$ do polohy $\overrightarrow{VB}$ v kladném smyslu a přitom $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.
 c) Jestliže $\overrightarrow{VA}$ a $\overrightarrow{VB}$ splynou, hovoříme o tzv. nulovém úhlu. Jeho základní velikost je 0° .

Pozn.: Každému orientovanému úhlu lze přiřadit nekonečně mnoho reálných čísel (jeho velikostí), přičemž platí, že každé dvě velikosti se od sebe liší o $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Def.: Necht' AVB je orientovaný úhel o základní velikosti α . Pak velikostí orientovaného úhlu AVB rozumíme každé z čísel $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

V.2.1.: Necht' $\overrightarrow{VA}$ je lib. polopřímka, $x \in \mathbf{R}$ lib. číslo. Pak existuje právě 1 orientovaný úhel AVB , jehož velikost v obloukové míře je x .

Pozn.: Předchozí věta zaručuje existenci zobrazení $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{M}$, kde $\mathbf{M}$ je množina všech orientovaných úhlů s pevným počátečním ramenem. Toto zobrazení je surjektivní, ale není injektivní (není prosté).

§3. Funkce sinus a kosinus

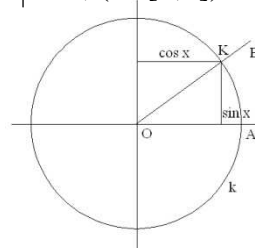
Def.: Necht' je dána jednotková kružnice k se středem v počátku souřadné soustavy 0. Ztotožníme kladnou poloosu osy x s počátečním ramenem orientovaného úhlu. Ke každému $x \in \mathbf{R}$ pak existuje právě 1 polopřímka OB tak, že $|\angle AOB| = x$, ($A=[1;0]$).

Označme $K \in OB \cap k$.

Hodnotou funkce sinus (resp. kosinus) v bodě x nazýváme y -ovou (resp. x -ovou) souřadnici bodu K .

Funkcí sinus (resp. kosinus) nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y_K]$ (resp. $[x, x_K]$) pro $\forall x \in \mathbf{R}$.

Zapisujeme $y = \sin x$ (resp. $y = \cos x$).



Pozn.: Přímou z definice plyne: Necht' $f: y = \sin x$

$g: y = \cos x$. Pak: $D(f) = D(g) = \mathbf{R}$

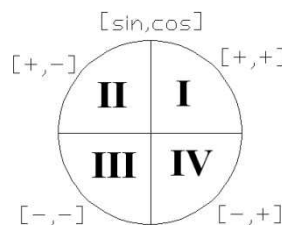
$H(f) = H(g) = \langle -1; 1 \rangle$

V.3.1.: Necht' $f: y = \sin x$, $g: y = \cos x$; $k \in \mathbf{Z}$. Pak platí:

- | | |
|--|--|
| 1) f je lichá | g je sudá |
| 2) rostoucí... $x \in \langle -\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi \rangle$ | rostoucí $x \in \langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$ |
| klesající... $x \in \langle \pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi \rangle$ | klesající $x \in \langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$ |
| 3) f je omezená | g je omezená |
| 4) f má maximum v bodech $\pi/2 + 2k\pi$ | g má maximum v bodech $2k\pi$ |
| f má minimum v bodech $3\pi/2 + 2k\pi$ | g má minimum v bodech $\pi + 2k\pi$ |
| 5) f, g jsou periodické s nejmenší periodou 2π | |

Pozn.: a) Vzhledem k periodičnosti stačí vyšetřovat funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

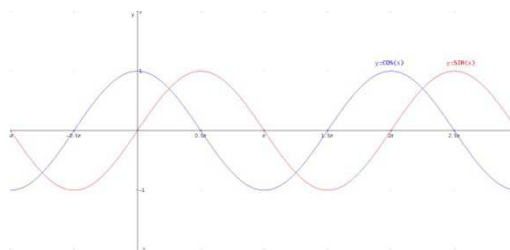
b) Znaménka funkcí $f: y = \sin x$, $g: y = \cos x$ v jednotlivých kvadrantech:



Pozn.: Hodnoty goniometrické funkce $f: y = \sin x$, $g: y = \cos x$ v některých důležitých bodech:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

Pozn.: Grafy funkcí $f: y = \sin x$, $g: y = \cos x$:



V.3.2.: Pro $\forall x \in \mathbf{R}$: $\sin x = \cos(x - \pi/2) = -\cos(x + \pi/2)$
 $\cos x = \sin(x + \pi/2) = -\sin(x - \pi/2)$

V.3.3.: Pro $\forall x \in \mathbf{R}$: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Pozn.: Vyjádření čísla 1 z předchozí věty se nazývá „trigonometrická jednička“.

§4. Funkce tangens a kotangens

Def.: Funkcí tangens (resp. kotangens) nazýváme funkci danou rovnicí $f: y = \frac{\sin x}{\cos x}$ (resp.

$g: y = \frac{\cos x}{\sin x}$). Zapisujeme $f: y = \operatorname{tg} x$ (resp. $g: y = \operatorname{ctg} x$).

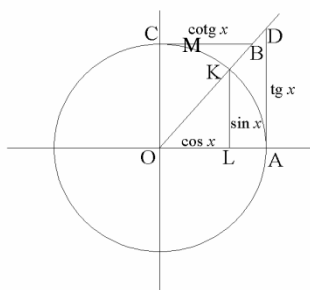
Pozn.: $D(f) = \mathbf{R} - \{(2k + 1)\pi/2, k \in \mathbf{Z}\}$

$D(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$

$D(g) = \mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

$D(g) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, (k + 1)\pi)$

Pozn.: Geometrické vyjádření čísel $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{ctg} x$:

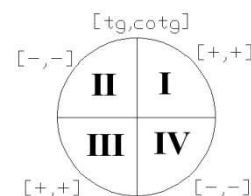


[Dk.: ...]

V.4.1.: Necht' $f: y = \operatorname{tg} x$; $g: y = \operatorname{ctg} x$ jsou funkcemi, $k \in \mathbf{Z}$. Pak mají následující vlastnosti:

- | | | |
|----|---|---|
| 1) | $H(f) = \mathbf{R}$ | $H(g) = \mathbf{R}$ |
| 2) | f je lichá | g je lichá |
| 3) | f je rostoucí v každém intervalu
$(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ | g je klesající v každém intervalu
$(k\pi, (k + 1)\pi)$ |
| 4) | nejsou omezené ani shora, ani zdola | |
| 5) | nemají extrémny | |
| 6) | jsou periodické s nejmenší periodou π | |

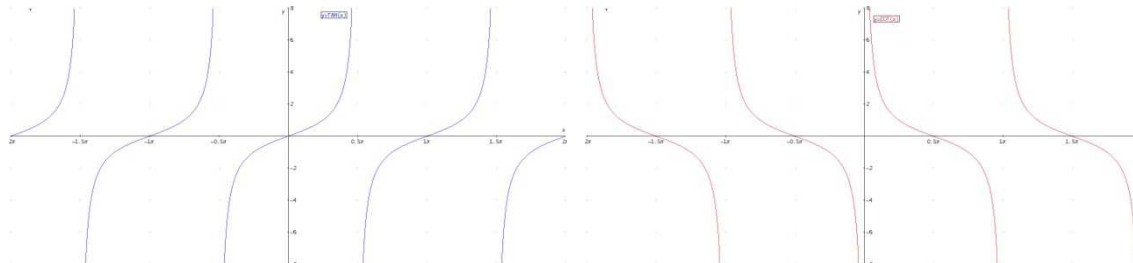
Pozn.: Znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech:
 obě funkce kladné v kvadrantu I a III a záporné v II a IV



Pozn.: Hodnoty goniometrických funkcí v některých bodech:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{cotg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-	0	-

Pozn.: Grafy funkcí $f: y = \operatorname{tg} x$; $g: y = \operatorname{cotg} x$:



$$\text{V.4.2.: } \forall x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{k\pi/2\}: \operatorname{tg} x = -\operatorname{cotg}(x - \pi/2)$$

$$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{tg}(x - \pi/2)$$

$$\text{V.4.3.: } \forall x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{k\pi/2\}: \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

§5. Zavedení goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku

Pozn.: Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens nazýváme goniometrickými funkcemi.

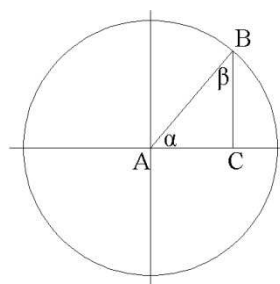
Pozn.: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB platí pro úhel $\alpha \in (0, \pi/2)$

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|} \text{ (protilehlá / přepona)}$$

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|} \text{ (přilehlá / přepona)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} \text{ (protilehlá / přilehlá)}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{|AC|}{|BC|} \text{ (přilehlá / protilehlá)}$$



Pozn.: Kromě výše uvedených gon. funkcí se zřídka používá gon. funkce sekans (sec) a kosekans (cosec) definovaná takto:

$$\sec x = 1/\cos x \quad \sec x = \frac{|AB|}{|AC|} \text{ (přepona / přilehlá)}$$

$$\operatorname{cosec} x = 1/\sin x \quad \operatorname{cosec} x = \frac{|AB|}{|BC|} \text{ (přepona / protilehlá)}$$

§6. Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Pozn.: S některými jsme se již seznámili ve V.3.2., V.3.3., V.4.2. a V.4.3.

V.6.1.: $\forall x \in \mathbf{R}$ platí: $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$$

$\forall x \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{k\pi/2\}$: $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}(\pi/2 - x)$

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(\pi/2 - x)$$

V.6.2.: $\forall x \in (0, \pi/2)$ platí: $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$

$$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$$

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$$

$$\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$$

Pozn.: Označíme-li f libovolnou z goniometrických funkcí, pak tvrzení z předchozí věty lze zapsat ve tvaru:

$$\forall x \in (0, \pi/2) : f(x) = |f(\pi - x)| = |f(\pi + x)| = |f(2\pi - x)|$$

V.6.3.: Vyjádření gon. funkcí pomocí jiné gon. funkce stejného argumentu pro $x \in (0; \pi/2)$:

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
$\sin x$	-	$\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$
$\cos x$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotg}(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	-	$\frac{1}{\operatorname{cotg}(x)}$
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$	-

[Dk.: ...]

Pozn.: Abychom mohli tabulku ve V.6.3. používat pro $\forall x \in \mathbf{R}$ je nutno opatřit jednotlivé vztahy znaménky příslušných funkcí v jednotlivých kvadrantech !!!

§7. Součtové vzorce

V.7.1.: Vzorce pro goniometrické funkce součtu a rozdílu argumentů (někdy jen součtové vzorce):

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

V.7.2.: $\forall x, y \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{(2k + 1)\pi/2\}, \forall (x + y) \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{(2k + 1)\pi/2\},$

$\forall (x - y) \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{(2k + 1)\pi/2\}$ platí:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)} \qquad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(y)}{1 + \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$$

[Dk.: ...]

V.7.3.: $\forall x, y \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{k\pi\}, \forall (x + y) \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{k\pi\}, \forall (x - y) \in \mathbf{R} - \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{k\pi\}$ platí:

$$\operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg}(x)\operatorname{cotg}(y) - 1}{\operatorname{cotg}(x) + \operatorname{cotg}(y)}$$

$$\operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg}(x)\operatorname{cotg}(y) + 1}{\operatorname{cotg}(y) - \operatorname{cotg}(x)}$$

V.7.4.: Vzorce pro goniometrické funkce dvojnásobného argumentu.

$$\forall x \in \mathbf{R} : \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

[Dk.: ...]

V.7.5.: Vzorce pro goniometrické funkce polovičního argumentu.

$$\forall x \in \mathbf{R} : \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

[Dk.: ...]

V.7.6.: Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí:

$$\forall x, y \in \mathbf{R} : \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

[Dk.: ...]

§8. Goniometrické rovnice a nerovnice

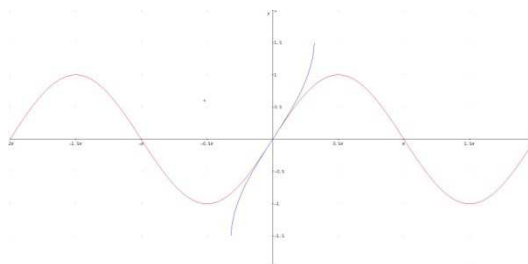
Pozn.: Goniometrickou rovnicí (resp. nerovnicí) nazýváme takovou rovnici (resp. nerovnici), v níž se neznámá vyskytuje v argumentu goniometrické funkce.

Př.:

§9. Cyklometrické funkce

Pozn.: Cyklometrickými funkcemi nazýváme funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Protože goniometrické funkce nejsou prosté, je nutno omezit jejich definiční obor na interval, v něm je daná goniometrická funkce monotónní, a tedy prostá.

Pozn.: Necht' $f: y = \sin x$, $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow H(f) = \langle -1; 1 \rangle$, f je rostoucí:

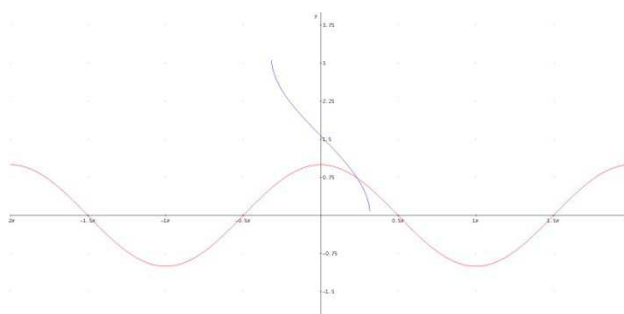


Def.: Funkce arkussinus, označená $f^{-1}: y = \arcsin x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $f: y = \sin x$, kde $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

V.9.1.: Funkce $f^{-1}: y = \arcsin x$ má tyto vlastnosti:

- 1) $D(f^{-1}) = \langle -1; 1 \rangle$, $H(f^{-1}) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- 2) f^{-1} je rostoucí (v celém $D(f^{-1})$).

Pozn.: Necht' $g: y = \cos x$, $D(g) = \langle 0; \pi \rangle \Rightarrow$
 $\Rightarrow H(g) = \langle -1; 1 \rangle$, g je klesající:

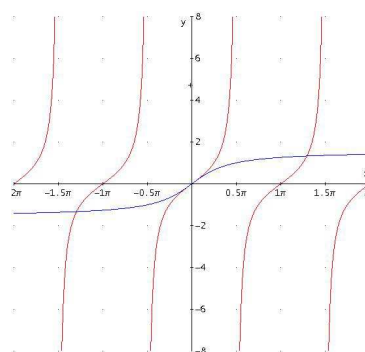


Def.: Funkce arkuskosinus, označená $g^{-1}: y = \arccos x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $g: y = \cos x$, kde $D(g) = \langle 0; \pi \rangle$.

V.9.2.: Funkce $g^{-1}: y = \arccos x$ má tyto vlastnosti:

- 1) $D(g^{-1}) = \langle -1; 1 \rangle$, $H(g^{-1}) = \langle 0; \pi \rangle$.
- 2) g^{-1} je klesající.

Pozn.: Necht' $h: y = \tan x$, $D(h) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow H(h) = \mathbf{R}$, h je rostoucí:

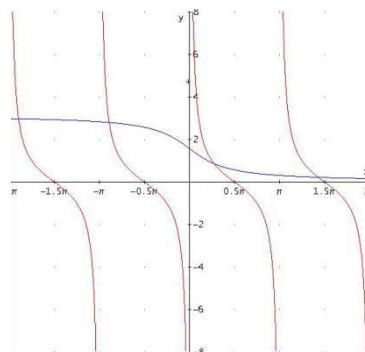


Def. : Funkce arkustangens, označená $h^{-1} : y = \operatorname{arctg} x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $h : y = \operatorname{tg} x$, kde $D(h) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

V.9.3.: Funkce $h^{-1} : y = \operatorname{arctg} x$ má tyto vlastnosti:

- 1) $D(h^{-1}) = \mathbf{R}$, $H(h^{-1}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- 2) h^{-1} je rostoucí .

Pozn.: Necht' $k : y = \operatorname{cotg} x$, $D(k) = (0; \pi) \Rightarrow \Rightarrow H(k) = \mathbf{R}$, k je klesající:



Def.: Funkce arkuskotangens, označená $k^{-1} : y = \operatorname{arccotg} x$, se nazývá funkce inverzní k funkci $k : y = \operatorname{cotg} x$, kde $D(k) = (0; \pi)$.

V.9.4.: Funkce $k^{-1} : y = \operatorname{arccotg} x$ má tyto vlastnosti:

- 1) $D(k^{-1}) = \mathbf{R}$, $H(k^{-1}) = (0; \pi)$.
- 2) k^{-1} je klesající .

V.9.5.: Platí: 1) $u = \arcsin v \Leftrightarrow v = \sin u$, $v \in \langle -1; 1 \rangle$, $u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

2) $u = \arccos v \Leftrightarrow v = \cos u$, $v \in \langle -1; 1 \rangle$, $u \in \langle 0; \pi \rangle$.

3) $u = \operatorname{arctg} v \Leftrightarrow v = \operatorname{tg} u$, $v \in \mathbf{R}$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4) $u = \operatorname{arccotg} v \Leftrightarrow v = \operatorname{cotg} u$, $v \in \mathbf{R}$, $u \in (0; \pi)$.

§10. Trigonometrické vztahy v trojúhelníku

Pozn.: Zavedení goniometrických funkcí v trojúhelníku jsme si uvedli v §5.

V.10.1.: Sinová věta: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \text{ kde } R \text{ je poloměr kružnice opsané trojúhelníku } ABC.$$

[Dk.: ...]

Pozn.: a) Sinová věta se používá ve tvaru $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$.

b) Sinová věta se užívá pro výpočet ostatních prvků trojúhelníku podle usu a sus (Ssu).

c) Ze vztahu $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ dostaneme zbylé dva pomocí cyklické záměny.

V.10.2.: Kosinová věta: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

[Dk.: ...]

Pozn.: a) Kosinová věta se používá k výpočtu ostatních prvků v trojúhelníku ABC podle sss a sus (Ssu).

b) Speciálním případem je Pythagorova věta pro $\gamma = 90^\circ$ ($\cos \gamma = 0$).

V.10.3.: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha, \text{ kde } S \text{ je obsah trojúhelníku } ABC.$$

[Dk.: ...]

V.10.4.: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{abc}{4R} = S, \text{ kde } R \text{ je poloměr kružnice opsané trojúhelníku } ABC.$$

[Dk.: ...]

Pozn.: Necht' o je obvod trojúhelníku ABC . Pak označme $\frac{o}{2} = \frac{a+b+c}{2} = s$

V.10.5.: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$S = \rho \cdot s, \text{ kde } \rho \text{ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku } ABC.$$

[Dk.: ...]

V.10.6.: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} & \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} & \sin \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} & \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} & \cos \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned}$$

V.10.7.: Heronův vzorec: V každém trojúhelníku ABC platí:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$